Laboratorio de Optica

Análisis de errores

Neil Bruce

Laboratorio de Optica Aplicada,

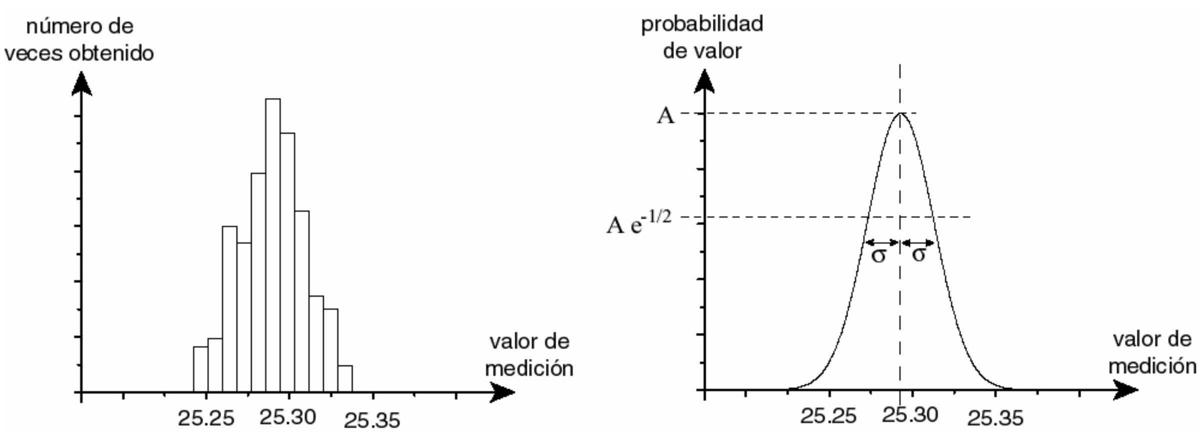
Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, U.N.A.M.,

A.P. 70-186, México, 04510, D.F.

(bruce@aleph.cinstrum.unam.mx)

Al realizar cualquier medición para determinar un valor en un experimento, intervienen una serie de factores que alteran o modifican este valor. Uno de esos factores se atribuye a los instrumentos y métodos de medición, en donde la ultima cifra significativa está relacionada a la mínima división de la escala en que están graduados.

Error en una medición



(a) (b)

Figura 1

Si medimos una distancia con una regla, por ejemplo, nuestra medición puede ser 25.3cm y dado que la regla tiene divisiones de 1mm, podemos estimar el error en nuestro valor como 0.5mm, i.e. el valor es 25.30±0.05cm. Quizá ésta implica que el valor verdadero de la medición puede tener cualquier valor entre 25.25 y 25.35 con igual probabilidad; pero no es así. **Es más probable que el valor es cerca de nuestra medición que más lejos**. Podemos ver este efecto si repetimos la medición muchas veces y graficar el valor medido (en una banda) contra el número de veces que la medición nos dio ese valor. Figura 1(a) muestra la grafica típica que se obtiene en esta situación. Figura 1(b) muestra la distribución normal. Se puede mostrar que en el límite de bandas muy pequeñas y un numero de observaciones muy grande (infinito), si los errores son aleatorios, que la probabilidad de obtener un valor (i.e. el numero relativo de veces de obtener un valor) está dada por la distribución normal.

La distribución está dado por:

$$P(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1}$$

en donde x es el valor, μ es el promedio (el valor en el pico) y σ es la desviación estándar que da la extensión de la función.

Se puede calcular que:

68% de los valores están en el intervalo $\mu-\sigma<x<\mu+\sigma$

95.5% de los valores están en el intervalo $\mu-2\sigma<x<\mu+2\sigma$

99.7% de los valores están en el intervalo $\mu-3\sigma<x<\mu+3\sigma$.

i.e. σ nos da una medida del “error” o extensión en el valor. Vamos a decir que nuestro valor es $\mu\pm\sigma$. También se puede ver que es muy improbable que el valor “correcto” es más que 3σ del valor promedio, entonces si dos valores están separados por más que 3σ, podemos decir que “no son iguales”.

Ahora, si tenemos N mediciones de nuestro valor, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, ¿cómo podemos calcular la mejor estimación al verdadero valor?. La probabilidad de obtener el valor en el intervalo $x_1 \to x_1 + \mathrm{d}x$ es:

$$P(x_1,\mu',\sigma)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x_1-\mu')^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x \tag{2}$$

donde μ' es nuestra estimación del promedio. Del mismo modo, la probabilidad de obtener los valores de todos nuestros N mediciones es:

$$\begin{aligned}&P(x_1,\mu',\sigma)P(x_2,\mu',\sigma)P(x_3,\mu',\sigma)\ldots\ldots P(x_N,\mu',\sigma)(\mathrm{d}x)^N\\ &\qquad=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{\mathrm{N}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma}\right)^2\right)(\mathrm{d}x)^N\end{aligned} \tag{3}$$

Queremos calcular el valor de μ' que te da la máxima probabilidad de obtener los N valores. Este calculo se puede hacer si se toma la diferencial de ecuación (3) con respeto al μ' y luego se pone este resultado igual a cero. Se obtiene que:

$$\mu' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (4)$$

i.e. el promedio aritmético.

Ahora, queremos calcular σ', una estimación de la desviación estándar que nos va a dar una estimación de la variación en cada una de nuestras mediciones. Se puede calcular del mismo modo del calculo para μ' para obtener:

$$\sigma' = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \mu'\right)^2 \right)^{1/2} \qquad (5)$$

En calculadoras, normalmente esta cantidad se conoce como σ_{N-1}.

Ahora tenemos nuestras mediciones con sus desviaciones estándar:

$$x_1 \pm \sigma',\ x_2 \pm \sigma',\ x_3 \pm \sigma',\ \ldots\ldots..,\ x_N \pm \sigma'$$

y una estimación del promedio de nuestras mediciones. Lo que queremos es una estimación del error del promedio. Para calcular esta cantidad tenemos que ver como hacer la combinación de errores.

Combinación de errores

Comúnmente la medición de una cantidad física no se realiza directamente con un instrumento, sino que se calcula a partir de otros parámetros medidos directamente con otros instrumentos. De manera que la incertidumbre asociada al cálculo final debe ser calculada también por un procedimiento definido, que involucre tanto a las cantidades directamente medidas como a sus correspondientes incertidumbres; esto se conoce con el nombre de propagación de incertidumbres.

Supongamos que el valor de la cantidad de interés es *z*, y se determina esta cantidad a partir de una variable directamente medida, *x*, a través de una función *f*( ):

$$z = f(x) \qquad (6)$$

la incertidumbre se calcula como sigue:

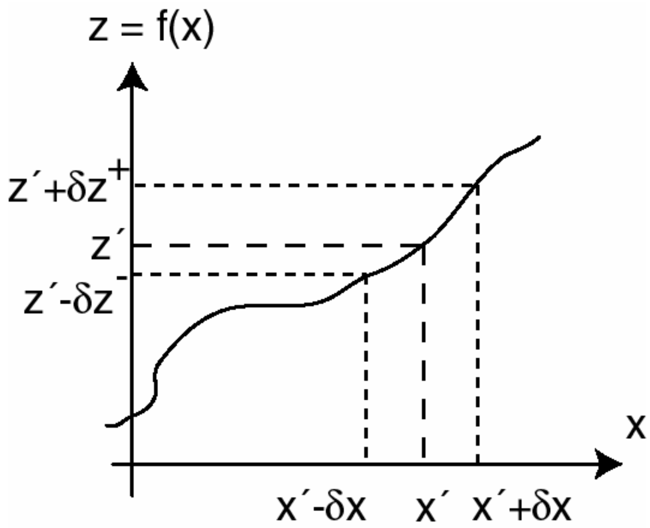


Figura 2

En la figura 2 se presenta la gráfica de la función $f(x)$; en el eje horizontal se muestra el valor x de la cantidad medida, así como su incertidumbre indicado por el intervalo:

$$x \pm \delta x = (x - \delta x, x + \delta x) \tag{7}$$

Proyectando dichos valores al eje de las ordenadas a través de la gráfica de la función, se obtienen los valores correspondientes de z:

$$z \pm \delta z = \left(z - \delta z^{-}, z + \delta z^{+}\right) \tag{8}$$

en donde se ha hecho evidente que el intervalo de error así obtenido es asimétrico para z. Aplicando la ecuación (6), obtenemos que:

$$\left.\begin{aligned} \delta z^{-} &= \Delta f^{-} = f(x) - f(x - \delta x) \\ \delta z^{+} &= \Delta f^{+} = f(x + \delta x) - f(x) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Si definimos como Δf simplemente el mayor de Δf^{-} y Δf^{+}, la incertidumbre propagada será

$$\delta z = \Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta x \tag{10}$$

Aceptando que Δf (= δz) y Δx (= δx) son pequeños, podemos aproximar el cociente en (10) por el valor de la derivada, resultando:

$$\delta z = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} \delta x \tag{11}$$

Para nuestras N mediciones podemos aproximar $\delta z_i = z_i - \mu'_z$ y $\delta x_i = x_i - \mu'_x$. Luego, utilizando la ecuación (5):

$$(\sigma'_z)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (z_i - \mu'_z)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu'_x)^2 \left(\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}\right)^2 = (\sigma'_x)^2 \left(\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}\right)^2 \tag{12}$$

Se puede generalizar la ecuación (12) a funciones de varias variables (se tiene que suponer que no hay correlaciones entre las variaciones en las varias variables)

$$(\sigma'_z)^2 = (\sigma'_{x_1})^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + (\sigma'_{x_2})^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + (\sigma'_{x_3})^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 + \cdots \qquad (13)$$

Ejemplos:

Utilizando la ecuación (13) para funciones simples nos da:

z	σ'_z
$x \pm y$	$\sqrt{(\sigma'_x)^2 + (\sigma'_y)^2}$
xy	$\sqrt{y^2(\sigma'_x)^2 + x^2(\sigma'_y)^2}$
$\frac{x}{y}$	$\sqrt{\frac{(\sigma'_x)^2}{y^2} + \frac{x^2(\sigma'_y)^2}{y^4}}$

Un ejemplo más complicado viene es la ley de Snell. Se puede utilizar la ley de Snell:

$$n = \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} \qquad (14)$$

en donde n es el índice de refracción de un bloque de vidrio (este es el desconocido en el experimento), θ_i es el ángulo de incidencia del rayo sobre el bloque de vidrio con respecto al normal a la superficie del bloque y θ_t es el ángulo de transmisión del rayo dentro del bloque de vidrio con respecto al normal interna de la superficie. Ahora, utilizando la ecuación (13), el error en cada medición del índice de refracción es:

$$(\sigma_n)^2 = (\sigma_{\theta i})^2 \frac{\cos^2(\theta_i)}{\sin^2(\theta_i)} + (\sigma_{\theta t})^2 \frac{\sin^2(\theta_i)\cos^2(\theta_t)}{\sin^2(\theta_t)} \qquad (15)$$

Si suponemos que $n \approx 1.5$ (que es típico para el vidrio) y que la desviación estándar en la medición del ángulo es $\sigma_\theta = 0.5° = 0.009$ radianes (nótese que los errores se manejan en radianes cuando hay ángulos involucrados):

θ_i	θ_t	$(\sigma_{\theta i})^2 \dfrac{\cos^2(\theta_i)}{\sin^2(\theta_i)}$	$(\sigma_{\theta t})^2 \dfrac{\sin^2(\theta_i)\cos^2(\theta_t)}{\sin^2(\theta_t)}$	σ_n
10°	6.65°	0.0059	0.0002	0.078
20°	13.18°	0.0014	0.0002	0.040
30°	19.47°	0.0005	0.0001	0.024
40°	25.37°	0.0003	0.0001	0.020
50°	30.71°	0.0001	0.0001	0.014
60°	35.26°	0.00006	0.0001	0.013
70°	38.79°	0.00002	0.0001	0.011
80°	41.04°	0.000006	0.0001	0.010

Esta tabla muestra varios resultados interesantes:

1. Debido a que la desviación estándar de *n* es mayor para ángulos de incidencia pequeños, es mejor realizar las mediciones a ángulos de incidencia grandes.
2. Como regla general se puede disminuir el error en la variable calculada minimizando el error en la medición de cada magnitud directamente medida.
3. Aunque lo anterior es cierto, también es cierto que hay ciertos errores en las magnitudes que son más trascendentes que otros. Por ejemplo, en la tabla se puede ver que, para ángulos de incidencia grandes, la contribución al error total del error del ángulo de incidencia es muy pequeño comparada con la contribución del error en el ángulo de transmisión. Esto indica que el error del ángulo de transmisión es más importante y por lo tanto debe hacerse más esfuerzo por minimizar éste error que el del ángulo de incidencia.

Error en el promedio

Utilizando la ecuación (4) tenemos:

$$\mu'_x = \frac{1}{N}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_N\right) \tag{16}$$

y utilizando la formula para el error en un suma:

$$s_{\mu'_x} = \frac{1}{N}\sqrt{\left(N\sigma'_x\right)^2} = \frac{\sigma'_x}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{N-1}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu'_x\right)^2\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_{N-1} \tag{17}$$

i.e. si formamos el promedio de N valores la desviación estándar (o error) en el promedio reduce como $1/\sqrt{N}$. Si tenemos más mediciones el error en el promedio es menor.

Ejemplo

Regresando a las mediciones para calcular el índice de refracción; si medimos los ángulos de incidencia y transmitancia 4 veces cada uno:

$$\theta_i = 80.2°, 80.5°, 80.1°, 79.7°$$
$$\theta_t = 40.8°, 41.0°, 41.2°, 40.9°$$

Se puede calcular la desviación en cada medición usando la ecuación (5):

$$\theta_i = 80.2 \pm 0.33°, 80.5 \pm 0.33°, 80.1 \pm 0.33°, 79.7 \pm 0.33°$$
$$\theta_t = 40.8 \pm 0.17°, 41.0 \pm 0.17°, 41.2 \pm 0.17°, 40.9 \pm 0.17°$$

Ahora formamos el promedio de cada parámetro, y debido a la relación (17), el error en el promedio es el error en cada medición entre $\sqrt{N}$, i.e. 2 en este caso:

$$\theta_i = 80.13 \pm 0.17°$$
$$\theta_t = 40.98 \pm 0.09°$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones para propagar errores (en radianes): $n = 1.502 \pm 0.002$.

Aquí hay otro punto importante: el número de cifras reportado en un resultado. Si el error en el valor está en la tercera cifra después del punto decimal, como en el ejemplo arriba, no tiene sentido reportar el valor con más de 4 o 5 cifras después del punto decimal. También siempre se debe reportar el valor y el error hasta la misma cifra.

Resumen de ecuaciones importantes:

Si tenemos *N* mediciones, x_i , de la cantidad *x*:

1. La mejor estimación de *x* es: $$\mu' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

2. El error en cada medición x_i es: $$\sigma' = \left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu'\right)^2\right)^{1/2}$$

3. El error en el promedio, μ' , es: $$s_{\mu'} = \frac{\sigma'}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{N-1}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu'\right)^2\right)^{1/2}$$

4. Si $x = f(u,v,w)$, entonces el error en *x* es:

$$\sigma_x'^2 = \sigma_u'^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \sigma_v'^2\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \sigma_w'^2\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2$$

en donde $\sigma_u', \sigma_v', \sigma_w'$ son los errores en *u*, *v* y *w*.

Otras ecuaciones importantes

En algunos experimentos tenemos varias mediciones de una cantidad y cada medición tiene su propio error, i.e. tenemos: $x_1 \pm \sigma_1, x_2 \pm \sigma_2, x_3 \pm \sigma_3, \cdots, x_N \pm \sigma_N$. Aquí, si una de las mediciones es muy precisa, debe ser más importante en el cálculo del promedio que una medición que no es muy preciso. Esto es, debemos realizar el promedio utilizando pesos para cada medición en donde el peso depende inversamente con el error de la medición.

En ecuaciones tenemos que el promedio es:

$$\mu' = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)}$$

y el error en este promedio con pesos es:

$$s_{\mu'} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Aquí, no hay que estimar los errores en cada valor, como en el caso anterior, porque ya los sabemos, entonces el resultado tiene una forma diferente. Se puede verificar que si todos los valores de los errores σ_i son iguales, recuperamos las ecuaciones para el promedio y el error en el promedio normales.

Otra situación que ocurre muchas veces en el laboratorio es la necesidad de ajustar una línea recta a los datos. Suponemos que tenemos los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_N, y_N)$ y que queremos ajustar estos datos a la línea recta $y = mx + c$, en donde *m* es el pendiente de la línea y *c* es la intersección de la línea en el eje *y*. Se puede calcular que las mejores estimaciones de *m* y *c* son:

$$m = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

y los errores en *m* y *c* son:

$$s_m = \left\{ \frac{1}{N(N-2)} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - c)^2}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \right) \right\}^{1/2}$$

$$s_c = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N(N-2)} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - c)^2}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \right) \right\}^{1/2}$$

Finalmente, si en el ajuste a una línea recta se conocen los errores en cada valor de y_i, las mejores estimaciones de *m* y *c* y sus errores son:

$$m = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right)$$

$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right)$$

$$s_m = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^{1/2}$$

$$s_c = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right)^{1/2}$$

Otra vez, como ya sabemos los errores, no los tenemos que estimar y estas ecuaciones tienen una forma diferente que las ecuaciones para el caso de error desconocido.

Errores sistemáticos

El análisis presentado arriba es para los errores estadísticos: estos errores suben o bajan una medición aleatoriamente de tal forma que repetición de una medición tiende a reducir el error. Sin embargo hay otro tipo de error, el error sistemático, que afecta todas las mediciones igual. Este tipo de error no se puede analizar estadísticamente y repetición de las mediciones no reduce este error. Algunos ejemplos de errores sistemáticos son:

- Errores de calibración de instrumentos. Por ejemplo, en el caso de la refracción de la luz en un bloque de vidrio, si el instrumento utilizado para medir los ángulos siempre mide un poco grande, todas las mediciones serán grandes y el valor final del índice de refracción saldrá mal. Este error no estará incluido en la estimación del error estadístico.
- Errores en los parámetros físicos requeridos en el experimento. Por ejemplo, en el mismo experimento para la transmisión de la luz en el vidrio, se aproxima que el índice de refracción del aire es igual a 1, cuando en realidad es 1.000293. Esto dará un error en el índice de refracción del vidrio.
- Cambios en las condiciones físicas. Repitiendo el mismo experimento en dos días diferentes cuando, por ejemplo, la temperatura es muy diferente, se obtendrá diferentes resultados para la medición. Por ejemplo, es conocido que el índice de refracción de un material depende de la temperatura. Entonces, la diferencia entre las mediciones del índice de refracción en los dos días puede ser mucho más grande que el error estadístico estimado.
- Errores de medición. Errores en la lectura de un vernier, equivocación en la escala de una medición, o simplemente errores en la medición escogido también afectarán los resultados finales.

Para reducir el efecto de errores sistemáticos es necesario analizar con cuidado cada experimento y diseñarlo en una forma que elimine o reduzca lo más posible estos errores. En ocasiones, si no se puede eliminar un error sistemático se puede identificar una corrección del resultado final para reducir el efecto del error. Sin embargo, la mejor forma de eliminar errores sistemáticos es realizar la misma medición con dos técnicas muy diferentes, y si el resultado es igual para los dos métodos, se puede suponer que los errores sistemáticos han sido eliminados. Si el resultado no es lo mismo en los dos métodos, y esta diferencia es mayor que el error estadístico, entonces uno (o dos) de los métodos tiene algún error sistemático y se debe trabajar más en su reducción.

Bibliografía

(1) D.C. Baird, *Experimentación. Una Introducción a la Teoría de Mediciones y al Diseño Experimental*, Prentice-Hall Hispanoamericano, México, (1991)

(2) H.F. Meiners, W. Eppenstein y K.H. Moore, *Laboratory Physics*, J. Wiley, New York, (1969)